Soit E un K-ev de dim. finie N, K=ℝ ou ℂ.

I. Intégrales définies sur un segment.

Soient a, b ∈ℝ tq. a≤b. Soient m∈ℕ*, A⊂ℝ^m, $F : A\times[a;b]\to E$ une application.

Si, pour chaque x∈A, l'application $F(x,.):[a;b]\to E$, $t\mapsto F(x,t)$ est continue par mcx, on peut considérer l'application $f : A\to E$ définie par:

$$\forall x\in A,\ f(x)=\int_a^b F(x,t)\,dt.$$

A. Les bornes sont indep. du paramètre.

Th 1: Continuité sous le signe ∫.
Si $F : A\times[a;b]\to E$ est **continue** sur $A\times[a;b]$, alors l'application f est continue sur A.

Application: **Convolution** des f° cont. et T-périodiques.
Soient $T\in\mathbb{R}_+^*$, $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ cont. et T-per., on pose:
$f*g:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ (convoluée) tq ∀x∈ℝ,

$$(f*g)(x)=\int_0^T f(t)\,g(x-t)\,dt.$$

Alors $(x,t)\mapsto f(t)\,g(x-t)$ cont $\Rightarrow$ $f*g$ cont.

Th 2: Dérivation sous le signe ∫. (A intervalle)

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l}\text{F est continue sur } A\times[a;b]\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\text{ existe et est continue sur } A\times[a;b]\end{array}\right|,$$

alors l'application f est de classe C^1 sur A et:

$$\forall x\in A,\ f'(x)=\int_a^b\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt.$$

Application: Calcul de $\int_0^\pi \ln(x+\cos t)\,dt$, $x\in]1;+\infty[$.

B. Les bornes dépendent du paramètre.

Th 3: Dérivation sous le signe ∫. (A, J int. ouverts de ℝ)

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l}\text{F est continue sur } A\times J\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\text{ existe et est continue sur } A\times J\\ u\text{ est de classe } C^1\text{ sur } A\end{array}\right|,$$

alors l'application $\psi : A\to E$ définie par:

$$\forall x\in A,\ \psi(x)=\int_a^{u(x)}F(x,t)\,dt\text{ est de classe } C^1\text{ sur A et:}$$

$$\forall x\in A,\ \psi'(x)=\int_a^{u(x)}\frac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt+u'(x)\,F(x,u(x)).$$

Exemple: Mq :

$$\forall x\in]0;+\infty[,\ \int_1^x\frac{\ln(x+t)}{t}\,dt=\frac{1}{2}(\ln x)^2+\int_1^x\frac{\ln(t+1)}{t}\,dt.$$

II. Intégrales impropres.

Soit I un intervalle de ℝ. Soient m∈ℕ*, A⊂ℝ^m, $F : A\times I\to K$ une application.

Si, pour chaque x∈A, l'application $F(x,.):[a;b]\to E$, $t\mapsto F(x,t)$ est continue par mcx, on peut considérer l'application $f : A\to K$ définie par:

$$\forall x\in A,\ f(x)=\int_I F(x,t)\,dt.$$

Def 1: Hypothèse de domination locale. On dit qu'une application $F : A\times I\to K$ vérifie l'hypothèse de domination locale sur $A\times I$ ssi ∀K compact ⊂ A, il existe une application: φ_K: I→ℝ continue, ≥0, intégrable sur I, telle que: $\forall(x,t)\in K\times I$, $|F(x,t)|\le\varphi_K(t)$.

On peut remplacer l'hyp. φ_K continue par φ_K cont. mcx.

Th 4: Continuité sous le signe ∫.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l}F\text{ est continue sur } A\times I\\ F\text{ vérifie l'hypothèse de domination locale sur } A\times I\end{array}\right|,$$

alors

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } x \text{ de } A,\ F(x,.)\text{ est intégrable sur I}\\ \text{L'application } f : A\to K,\ x\mapsto\int_I F(x,t)\,dt\text{ est continue sur } A\end{array}\right.$$

Exemple: $f : x\mapsto\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{e^{-t^2}}{x+|t|}\,dt$ est continue sur]0;+∞[.

Th 5: Dérivation sous le signe ∫.

$$\text{Si}\left\{\begin{array}{l}F\text{ est continue sur } A\times I\\ F\text{ vérifie l'hyp. dom. locale sur } A\times I\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\text{ existe et est continue sur } A\times I\\ \dfrac{\partial F}{\partial x}\text{ vérifie l'hyp. dom. loc. sur } A\times I\end{array}\right|,$$

alors

$$\left\{\begin{array}{l}\text{Pour tout } x\text{ de } A,\ F(x,.)\text{ et } \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.)\text{ sont intégrables sur } I\\ \text{L'application } f : A\to K,\ x\mapsto\int_I F(x,t)\,dt\text{ est } C^1\text{ sur } A\text{ et:}\\ \forall x\in A,\ f'(x)=\int_I\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,t)\,dt\end{array}\right.$$

On peut déduire les théorèmes des continuité et de dérivation sous le signe ∫ du th. de cv. dominée. (1)

Prop 1: Dérivation multiple sous le signe $\int$.
Soit n∈ℕ.

Si $\left\{\begin{array}{l} F,\dfrac{\partial F}{\partial x},\dots,\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ existent et sont continues sur } A\times I \\ F,\dfrac{\partial F}{\partial x},\dots,\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n} \text{ vérifient l'hyp. dom. loc. sur } A\times I \end{array}\right|$,

alors

$$\left\{\begin{array}{l} \forall x\in A,\ F(x,.) \text{ et } \dfrac{\partial F}{\partial x}(x,.),\dots,\dfrac{\partial^n F}{\partial x^n}(x,.) \text{ sont int. sur } I \\ \text{L'application } f: A\to K,\ x\mapsto \displaystyle\int_I F(x,t)\,dt \text{ est } C^n \text{ sur } A \text{ et:} \\ \forall i\in[\![1,n]\!],\forall x\in A,\ f^{(i)}(x)=\displaystyle\int_I \dfrac{\partial^i F}{\partial x^i}(x,t)\,dt \end{array}\right.$$

III. Applications.

A. La fonction Γ d'Euler. (Cf. dvt 221)

MONIER p.220. (et Goudon p162, et Pommelet p.196)

On appelle fonction Γ d'Euler l'application

Γ:]0;+∞[→ℝ, x↦$\Gamma(x)=\displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt$.

Γ est C∞ sur]0;+∞[, convexe sur]0;+∞[,

et $\Gamma(x)\underset{0+}{\sim}\dfrac{1}{x}$

B. Dvée n$^{\text{ième}}$ de la transf. de Laplace. (POM)

Pommelet p.198

Soit f cont. $\mathbb{R}^+\to\mathbb{C}$; la transformée de Laplace de f est, lorsqu'elle existe, donnée par l'intégrale:

$\lambda\mapsto Lf(\lambda)=\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-\lambda t}dt$. (2)

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est bornée, alors Lf est une fonction de classe C∞ sur $\mathbb{R}_+^*$, dont la dérivée n$^{\text{ième}}$ est donnée par:

$$Lf^{(n)}(\lambda)=(-1)^n\int_0^{+\infty} t^n f(t)e^{-\lambda t}dt .$$

Application de la Prop.1

C. Théorème de Fubini (segments). (Mp170).

Si $F:A\times[a;b]\to E$ est continue sur $A\times[a;b]$, alors l'application $f:A\to E$ définie par:

$\forall x\in A,\ f(x)=\displaystyle\int_a^b F(x,t)\,dt$ est continue sur A,

et pour tout $(\alpha,\beta)\in A^2$,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta\left(\int_a^b F(x,t)\,dx\right)dt=\int_a^b\left(\int_\alpha^\beta F(x,t)\,dx\right)dt$$

Application du §I. C'est un th. "d'intégration sous le signe $\int$", ou encore un cas particulier du th. de Fubini, dans le cas d'intégration sur des segments. (3)

IV. Notes.

(1) **Th. de cv. dominée** (M4 4.1.6 Rem).

Soit $(f_n: I\to K)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications.

Si $\left\{\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est cont. mcx sur I} \\ (f_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ conv. simplt sur I vers une app° } f \\ f \text{ est cont. mcx sur I} \\ \exists\varphi: I\to\mathbb{R}, \text{ cont. mcx, } \geq 0, \text{ int. sur I,} \\ \text{telle que } \forall n\in\mathbb{N}, |f_n|\leq\varphi \text{ (hyp. de domination)} \end{array}\right.$

alors $\left\{\begin{array}{l} \forall n\in\mathbb{N},\ f_n \text{ est intégrable sur I} \\ f \text{ est intégrable sur I} \\ \displaystyle\int_I f_n \to \int_I f \end{array}\right.$

(2) **Transformée de Laplace.**

Les propriétés de cette transformation lui confèrent une grande utilité dans l'analyse des systèmes dynamiques linéaires. La plus intéressante de ces propriétés est que l'intégration et la dérivation sont transformées en division et multiplication par *p*, de la même manière que le logarithme transforme la multiplication en addition. Elle permet ainsi de ramener la résolution des équations différentielles linéaires à coefficients constants à la résolution d'équations affines (dont les solutions sont des fonctions rationnelles de *p*).

Exemple:

On cherche à résoudre : $f^{(2)}(t)+4f(t)=\sin(2t)$,

C.I $f(0)=0,\ f'(0)=0$. On note $\varphi(t)=\sin(2t)$.

Une table de transformées de Laplace (ou le calcul) donne: $L\{\varphi\}(s)=\dfrac{2}{s^2+4}$. Et l'équation devient:

$$s^2L\{f\}-sf(0)-f^{(1)}(0)+4L\{f\}=L\{\varphi\}$$

D'où: $L\{f\}(s)=\dfrac{2}{(s^2+4)^2}$.

Reste à appliquer la transf. de Laplace inverse pour trouver f ; comme $L\{f\}$ est une fraction rationnelle, on la décompose en elts simples puis le tableau des transformées de Laplace permet de trouver:

$$f(t)=\frac{1}{8}\sin(2t)-\frac{t}{4}\cos(2t)$$

(3) **Th. de Fubini** (Pommelet p.343.).

(E,B,λ) et (F,C,μ) espaces mesurés σ-finis, soit f une fonction $B\times C$-mesurable de $E\times F\to\mathbb{C}$,

et si $\displaystyle\int_E d\lambda(x)\left(\int_E |f(x,y)|\,d\mu(y)\right)<\infty$,

Alors les deux intégrales suivantes sont finies et égales:

$$\int_E d\lambda(x)\left(\int_E f(x,y)\,d\mu(y)\right)=\int_E d\mu(y)\left(\int_E f(x,y)\,d\lambda(x)\right)$$